

どこで留学するか

AHPで意思決定

2010-08-16

Daniel Eppens

Jプログラム、群馬大学

目次

1. 序論.....	3
2. 「何処で留学するか」をAHPで解く.....	3
3. 整合性について.....	8
4. 結論.....	11
参考文献.....	11

1. 序論

AHP (Analytic Hierarchy Process、階層化意思決定法) (Thomas L. Saaty) という意思決定方法は選択に関する感じと直感を数量化する。AHPは選択の問題を階層化し、数量化し、そして最も相応しい選択を計算する方法である。人の直感に基づいた方法なので、使う人にとっての相対的に最もいい選択を計算できる。そして、この方法は選択対象に関係なく使えるので様々な分野で使える方法である。

本稿は著者が何処で留学するかという問題をAHPで解きながらAHPの仕方を説明する。

2. 「何処で留学するか」をAHPで解く

何処で留学するのは次の大学から選択、日本の東北大学、日本の東京大学、中国の北京大学、中国の精華大学、韓国のYYY大学。

まず、AHPは問題を分析し、階層構造として整理する。問題には何が重要か、何が必要か、問題の評価観点を良く考えた上に階層を作る。最上位にくるのは問題・目標、意思決定すべきゴールである。この場合は「何処で留学するか」である。その次の層には、「何処で留学するか」を決定するに際して代替案を評価する評価項目が配置される。この場合の評価項目は「勉強」、「お金」、「面白さ」、「将来」と「難しさ」。その下の層に代替案、「東北大学」、「東京大学」、「早稲田大学」、「北京大学」、「精華大学」、「韓国」が配置される。図1に「何処で留学するか」の評価の構造が示されている。

図1において、「何処で留学するか」からそれぞれの評価項目に至る矢印は、「何処に留学するか」に対して、評価項目の重要度を決定することを意味する。その下のレベルも同様に、それぞれの評価項目に対して、代替案の重要度を決定することを表している。

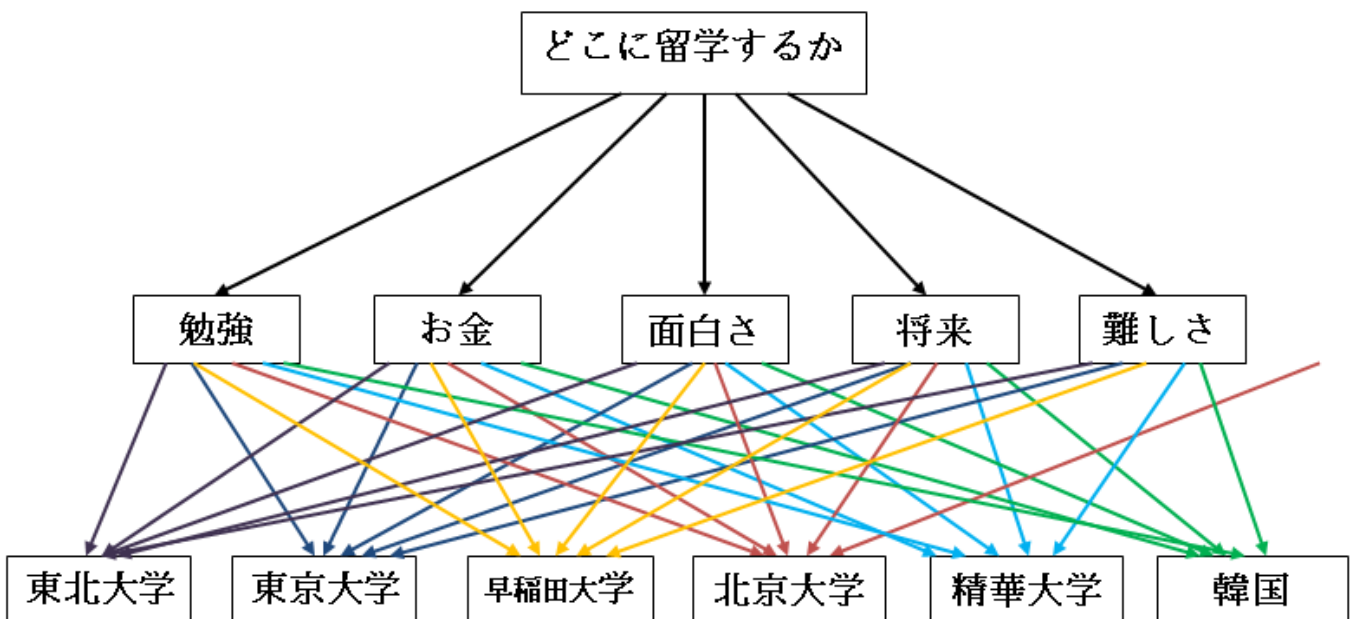


図1：問題の階層図

評価項目あるいは代替案の重要度の相対的比較をできるだけ正確に検出したい。八巻直一・高井英造（2005）は「心理学の成果として、2つの項目一対についての相対比較をすることによって、「心の中にある」重要度の相対比較は、相当正確に行える」と述べている。AHPはその事実を適用して、一対比較で重要度を決定する。

AHPでは、一対比較は1－9のスケールで行われている。例えばAとBを比較すると、AとBの重要度は同じ程度ならAはBに対して1とし、AはBより重要ならAはBに対して5とし、そしてAはBに対して絶対的に重要ならAはBに対して9とする。なぜAHPは1から9までのスケールで数量化するのだろうか。AHPを発見したThomas L. Saaty（1990）はこの問題について、人間の性質・能力は感覚を1－9のスケールで評価するのはうまいのでAHPは1から9までのスケールを用いると述べている。

AHPは次のように一対比較を数値化する：

- AとBの重要度は、「同じ程度」なら、 1
- AはBより「やや重要」なら、 3
- AはBより「重要」なら 5
- AはBより「かなり重要」なら 7
- AはBより「絶対的に重要」なら 9

逆にAはBより重要じゃない場合は次のように数値化する：

- AはBより「やや重要じゃない」なら 1/3
- AはBより「重要じゃない」なら 1/5
- AはBより「かなり重要じゃない」なら 1/7
- AはBより「絶対的に重要じゃない」なら 1/9

たとえば「勉強」と「お金」を比較すると、「勉強」は「お金」より「かなり重要」なら「勉強」は「お金」に対して7とする。したがって、「お金」の「勉強」に対する一対比較値は1/7となる。一対比較を行列の形にまとめる。これを一対比較行列といい、 $X = (x_{ij})$ と表す。 x_{ij} は項目*i*に対する項目*j*の一対比較である。「何処で留学するか」の問題の2番目の層、評価項目間の一対比較行列は表1となる。

表1：評価項目間の一対比較

	勉強	お金	面白さ	将来のため	難しさ
勉強	1	7	3	2	5
お金	1/7	1	1/5	1/5	1/5
面白さ	1/3	5	1	1/2	3
将来	1/2	5	2	1	5
難しさ	1/5	5	1/3	1/5	1

次に、目標「何処で留学するか」に対する各評価項目の重要度を定める。重要度は一対比較行列の各行要素の幾何平均で求める。

$$\text{勉強} : (1 \times 7 \times 3 \times 2 \times 5)^{\frac{1}{5}} = 2.91$$

$$\text{お金} : \left(\frac{1}{7} \times 1 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}} = 0.26$$

$$\text{面白さ} : \left(\frac{1}{3} \times 5 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 3\right)^{\frac{1}{5}} = 1.20$$

$$\text{将来} : \left(\frac{1}{2} \times 5 \times 2 \times 1 \times 5\right)^{\frac{1}{5}} = 1.90$$

$$\text{難しいさ} : \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times 1\right)^{\frac{1}{5}} = 0.58$$

AHPでは重要度の総和を1と正規化することになっているので上の幾何平均の総和で各行要素の幾何平均を割ると、重要度ベクトル、 w 、が得られる。表2は評価項目の重要度を表している。表2によると勉強は特に重要で、お金は最も重要ではない評価項目である。

表2：評価項目の重要度

評価項目	重要度
勉強	0.42
お金	0.04
面白さ	0.18
将来	0.28
難しいさ	0.08

次に、各評価項目に対する代替案の重要度を求める。先の目標に対する評価項目の重要度を求めるプロセスと同様に得られる。例えば、精華大学の理工学部は中国の中で最も有名なので、勉強に対する評価は非常に高い。東京大学は日本の大学の中で勉強に対する評価が一番高いが、精華大学は東京大学より難しいので精華大学の方は勉強に対するの評価が高い。北京大学も日本の大学より難しいと考えるので北京大学も勉強に対する評価は高い。

精華大学は難しく、勉強のペースが速く、精華大学で留学するのは大変かもしれない。したがって難しいさに対する評価は低い。精華大学は難しいが、なぜ難しいさに対する評価は高くなく、低いのだろうか。それは、難しいさは目標「どこで留学するのか」に対する否定的な影響を与えることにしたいのである。

そして、中国語ができないので中国の大学は難しさに対するの評価は日本の大学の評価より低い。勉強と難しさに対する各大学の評価は表3と表4に表されている。

表3：勉強に対する一対比較

勉強	東北大学	東京大学	早稲田大学	北京大学	精華大学	韓国
東北大学	1	1/5	5	1/3	1/8	2
東京大学	4	1	7	1/3	1/6	5
早稲田大学	1/5	1/7	1	1/7	1/9	1
北京大学	3	4	7	1	1/5	5
精華大学	8	6	9	5	1	9
韓国	1/2	1/5	1	1/5	1/9	1

表4：難しさに対する一対比較

難しさ	東北大学	東京大学	早稲田大学	北京大学	精華大学	韓国
東北大学	1	1	1/2	5	8	3
東京大学	1	1	1/2	5	8	3
早稲田大学	2	2	1	6	9	3
北京大学	1/5	1/5	1/6	1	4	¼
精華大学	1/8	1/8	1/9	1/4	1	1/7
韓国	1/3	1/3	1/3	4	7	1

残っている評価項目は「お金」、「面白さ」と「将来」。中国は日本より安いので中国の大学は日本の大学よりお金に対する評価は高い。しかし、日本で留学すると奨学金もらえるかもしれないが奨学金もらえるかどうかは分からない。そして、田舎は首都より安いので東北大学は東京大学と早稲田大学より評価が高い。

「面白さ」に対する評価は北京に位置する大学が最も高い。北京は公園が多く、非常に綺麗な都市である。今北京は速く発展しているのでたいへん面白い所と考える。東京に位置する大学の評価も高いが、北京のほうが高い。

「将来」に対する評価は東北大学が最も高い。東北大学で留学すると特別な「Double Diploma」というプログラムに入れる。今までスウェーデンの大学でとった単位を全部東北大学に交換し、東北大学でとる単位を全部スウェーデンの大学に交換できる。そして、学部と大学院を卒業した証明書は東北大学からもらい、スウェーデンの大学からももらう。しかし、「Double Diploma」に入るのは非常に難しく、毎年一人だけが入れる。

表5：お金に対する一対比較

お金	東北大学	東京大学	早稲田大学	北京大学	精華大学	韓国
東北大学	1	3	3	1/6	1/6	1/4
東京大学	1/3	1	1	1/6	1/6	1/4
早稲田大学	1/3	1	1	1/6	1/6	1/4
北京大学	6	6	6	1	1	3
精華大学	6	6	6	1	1	3
韓国	4	4	4	1/3	1/3	1/3

表6：面白さに対する一対比較

面白さ	東北大学	東京大学	早稲田大学	北京大学	精華大学	韓国
東北大学	1	1/4	1/4	1/6	1/6	1/5
東京大学	4	1	1	1/5	1/4	1/2
早稲田大学	4	1	1	1/5	1/4	1/2
北京大学	6	5	5	1	2	1
精華大学	6	4	4	1/2	1	1
韓国	5	2	2	1	1	1

表7：将来に対する一対比較

将来	東北大学	東京大学	早稲田大学	北京大学	精華大学	韓国
東北大学	1	7	9	7	5	8
東京大学	1/7	1	5	1/2	1/3	4
早稲田大学	1/9	1/5	1	1/5	1/7	2
北京大学	1/7	2	5	1	1/4	5
精華大学	1/5	3	7	4	1	5
韓国	1/8	1/4	1/2	1/5	1/5	1/5

次に、評価項目に対するそれぞれの大学の重要度を計算する。目標に対する評価項目の重要度と同様に一対比較行列の各行要素の幾何平均で求める。その後で、幾何平均を1と正規化する。表8に総和が1になるように正規化した重要度が表されている。表8には目標に対する評価項目の重要度も表されている。

表 8

評価基準	評価項目の重要度	東北大学	東京大学	早稲田大学	北京大学	精華大学	韓国
勉強	0.42	0.07	0.15	0.03	0.14	0.56	0.04
難しいさ	0.08	0.23	0.23	0.34	0.05	0.02	0.12
お金	0.04	0.08	0.04	0.04	0.35	0.35	0.14
面白さ	0.18	0.03	0.09	0.09	0.33	0.25	0.21
将来	0.28	0.52	0.09	0.03	0.11	0.22	0.02

最後の結果を得るために目標に対する評価項目の重要度を評価項目に対する大学の重要度にかける。最後に各大学の評価を総合する。総合評価が最も高い大学はAHPによって選ぶべき大学である。表9は総合評価を表したものである。ここでは、精華大学がAHPに選ばれた。次に来るのは東北大学で、その後は北京大学、東京大学、韓国、早稲田大学の順である。

	東北大学	東京大学	早稲田大学	北京大学	精華大学	韓国
勉強	0,029	0,063	0,013	0,059	0,235	0,017
難しいさ	0,018	0,018	0,027	0,004	0,002	0,010
お金	0,003	0,002	0,002	0,014	0,014	0,006
面白さ	0,005	0,016	0,016	0,059	0,045	0,038
将来	0,146	0,025	0,008	0,031	0,062	0,006
総和評価	0,202	0,124	0,066	0,167	0,357	0,075

3. 整合性について

AHPでは整合の問題がある。人間が一対比較を行うとき、一対比較行列は必ずしも完全整合ではない。完全整合的な一対比較行列を作るのは殆ど無理である。例えば、A、B、Cの相対的な重要度を定める場合、一対比較をする人はAはBより重要でBはCより重要、そしてCはAより重要と判断したとする。ここでAはもちろんCより重要であるはずだ。このような判断は一対比較行列の不整合性のもとである。もちろん、選択肢が三つしかないならこのような間違いは少ないが、一対比較行列が大きくなればなるほど整合性が失われる。

ある階層の一対比較行列 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ を見よう。 A_{ij} は層の要素 C_i の C_j に対するの一対比較。先の「何処で留学するか」の一対比較行列と同様に $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$ 。層の要素 C_1, \dots, C_n の重要度は w_1, \dots, w_n とする。完全整合の場合、例えば重要度はとある物の完璧に量ったウェイト、なら (Thomas L. Saaty, 1990) :

$$a_{i,j} = \frac{w_i}{w_j} \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$a_{ij} \cdot \frac{w_j}{w_i} = \frac{w_i}{w_j} \cdot \frac{w_j}{w_i} = 1 \quad i, j = 1, \dots, n$$

そして、

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} w_j = \sum_{j=1}^n w_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n w_i = w_i \sum_{j=1}^n 1 = n w_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$\rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} w_j = n w_i \quad i = 1, \dots, n$$

しかし、

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} w_j = n w_i \leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{w} = n \mathbf{w} \quad i = 1, \dots, n$$

ということは、 \mathbf{A} は整合的に完璧であれば、 \mathbf{w} は \mathbf{A} の固有ベクトルで n は \mathbf{A} の固有値である。しかし、実際の場合、 a_{ij} は完璧にはかった数値ではなく、各観的な感覚で行った一対比較から得られた数値である。したがって、 a_{ij} は $\frac{w_i}{w_j}$ から離れ、 n は \mathbf{A} の固有値から離れ、そして、 $\mathbf{A} \mathbf{w} = n \mathbf{w}$ は $\mathbf{A} \mathbf{w} = \mu \mathbf{w}$, $\mu \neq n$ になる。この事実から Saaty 先生は整合度 (英語: Consistency Index, CI) を次のように定義する:

$$CI = \frac{\mu - n}{n - 1}$$

完全整合であるとき、 $\mu = n$, $CI = 0$ 。 CI の値が大きいほど整合性が失われている。 Saaty 先生は多くの実験から $CI \leq 0.1$ の範囲ならば整合性はまずまずとみなし、それを超える場合、一対比較をやり直すべきである、と主張している。

整合度を計算するために、 μ を求めなければならない。しかし、重要度ベクトル \mathbf{w} は幾何平均法 (本稿で使われている方法) で求められた場合、 μ は $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$ になる。

そして、整合度を計算する際に μ の代わりに、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ の算術平均値 $\bar{\lambda}$ を用いて、次のように整合度を再定義する：

$$CI = \frac{\bar{\lambda} - n}{n - 1}$$

したがって、整合度を計算するために $\bar{\lambda}$ を求めなければならない。

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n}$$

ただし、

$$A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} \leftrightarrow w_1\lambda_1 = \sum_{k=1}^n a_{1k}w_k, w_2\lambda_2 = \sum_{k=1}^n a_{2k}w_k, \dots, w_n\lambda_n = \sum_{k=1}^n a_{nk}w_k$$

$$\text{したがって、} \bar{\lambda} = \frac{1}{n} \left(\frac{\sum_{k=1}^n a_{1k}w_k}{w_1} + \frac{\sum_{k=1}^n a_{2k}w_k}{w_2} + \dots + \frac{\sum_{k=1}^n a_{nk}w_k}{w_n} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\sum_{k=1}^n a_{jk}w_k}{w_j}$$

今、先の表1, 3, 4, 5, 6, 7の一对比較行列の整合度を求めることができる。表10は上の公式で計算した各一对比較行列の整合度を表しているものである。表7、将来、以外の行列の整合度はSaaty先生が提案した範囲を超えていないので整合的である。将来の一对比較行列を直すべきかもしれないがほんの少しだけでSaaty先生の範囲を超えているのでこのままで残しておいても良いと考える。なぜなら、 $CI \leq 0.1$ の代わりに $CI \leq 0.15$ の範囲の方がいいと主張している人もいる。したがって、本稿の一对比較行列は整合的で、一对比較は正確に行われたと判断できる。

表10：一对比較行列の整合度

一对比較行列	CI
表1	0.08
表3	0.04
表4	0.06
表5	0.04
表6	0.05
表7	0.11

4. 結論

精華大学がAHPに選ばれたので今度精華大学で留学すべき。表9によると精華大学の勉強の評価は極めて高い、したがって精華大学の総合評価が最も高い。東北大学の「Double Diploma」は就職に非常に有利なので東北大学は将来の評価が非常に高く、二位になった。北京大学は精華大学と同様にお金に対する評価が高いが、目標に対するお金の評価は低いのでお金に対するの評価は総合評価にあまり影響を与えない。北京大学の面白さの評価も非常に高いが目標に対する面白さの評価は目標に対する将来の評価より低い。したがって、お金と面白さの評価が高い北京大学は将来の評価が高い東北大学に負け、三位になった。

AHPの結果は明らかであるが行われた判断が信用できるかどうかという問題がある。一対比較行列の整合度はSaaty先生が提案した範囲以内なので一対比較は正確に行われ、AHPの結果に信用ができると考える。

しかし、本稿の階層をもっと深めた方がいいかもしれない。もし重要な評価項目がAHPの階層に含まれなければAHPの結果は信用できないということになる。本稿の階層を「環境」や「文化」などで増加すればいいと考える。そうすると結果が少々変わる可能性がある。AHPの階層を作るのは非常に難しい問題である。幾つの評価項目を階層に含むのかと何階の階層を作るのかは簡単な問題ではない。

その上に、評価項目の内容が被っている可能性がある。たとえば、精華大学は非常に難しく、レベルが高い大学なので難しさに対する評価が低い。しかし、精華大学の面白さに対する評価は同じ理由で北京大学より低い。したがって、精華大学は非常に難しく、レベルが高い大学が精華大学の総合評価に二回影響を与えた。このようなことに注意しないとAHPの結果の信用度が下がる。

参考文献

Thomas L. Saaty (1990) 「The Analytic Hierarchy Process Series Vol.1」 RWS Publication

八巻直一・高井英造 (2005) 「問題解決のためのAHP入門」 日本評論社

杉山学 (2010) 「マネジメント・サイエンスの概説と意思決定支援の具体例」 「サービス・イノベーションの新展開」 東北大学大学院経済学研究科サービス・イノベーション人材育成推進プログラム編